ŠKOLSKO / GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

24. siječnja 2011.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1. (4 boda)

Razlika recipročnih vrijednosti dvaju uzastopnih prirodnih brojeva je $0.0aaa\ldots = 0.0\dot{a}$. Koje vrijednosti može poprimiti znamenka a?

Rješenje. Ako su ta dva uzastopna prirodna broja n i $n+1$, dobivamo jednadžbu

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 0.0aaa\ldots$$

Kako je $0.0aaa\ldots = 0.0\dot{a} = \dfrac{a}{90}$, (1 bod)

rješavamo jednadžbu $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{a}{90}$ odnosno $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{90}$

tj.

$$n(n+1) = \frac{90}{a} \qquad \text{ili} \qquad a = \frac{90}{n(n+1)}.$$ (1 bod)

Dalje možemo nastaviti na više načina:

Prvi način.

Izraz na desnoj strani jednakosti $n(n+1) = \dfrac{90}{a}$ mora biti cijeli broj, pa je $a \in \{1, 2, 3, 5, 9\}$.

Zato je $\dfrac{90}{a} \in \{90, 45, 30, 18, 10\}$. (1 bod)

Od tih brojeva, samo se $90 = 9 \cdot 10$ i $30 = 5 \cdot 6$ mogu prikazati u obliku umnoška dvaju uzastopnih prirodnih brojeva. Dakle, a može biti 1 ili 3, (1 bod)

jer je $\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{90} = 0.0111\ldots$ i $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{30} = 0.0333\ldots$

Drugi način.

U desnu stranu jednakosti $a = \dfrac{90}{n(n+1)}$ uvrštavamo redom $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$.

Za $n = 1$ i $n = 2$ dobivamo $a \in \mathbb{N}$, ali a nije znamenka.

Za $n = 5$ dobivamo $a = \dfrac{90}{5 \cdot 6} = 3$,

a za $n = 9$ dobivamo $a = \dfrac{90}{9 \cdot 10} = 1$.

Za $n > 9$ razlomak $\dfrac{90}{n(n+1)}$ je manji od 1,

pa su $a = 1$ i $a = 3$ jedina rješenja zadatka. (2 boda)

Zadatak A-4.2. (4 boda)

Neka je z nultočka polinoma $z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{n} + 1$. Odredi sve moguće vrijednosti izraza z^n.

Rješenje.

Rješenja kvadratne jednadžbe $z^2 - 2z\cos\dfrac{\pi}{n} + 1 = 0$ su

$$z = \frac{2\cos\dfrac{\pi}{n} \pm \sqrt{4\cos^2\dfrac{\pi}{n} - 4}}{2} = \cos\frac{\pi}{n} \pm i\sin\frac{\pi}{n}, \qquad \text{(1 bod)}$$

pa je

$$\begin{aligned} z^n &= \left(\cos\frac{\pi}{n} \pm i\sin\frac{\pi}{n}\right)^n && \text{(1 bod)} \\ &= \cos\left(n\cdot\frac{\pi}{n}\right) \pm i\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{n}\right) && \text{(1 bod)} \\ &= \cos\pi \pm i\sin\pi \\ &= -1 \pm i\cdot 0 = -1. && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Jedino rješenje je $z^n = -1$.

Zadatak A-4.3. (4 boda)

Dokaži da je, za sve $n \in \mathbb{N}$, broj $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ djeljiv sa 7.

Prvo rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned} 2^{n+2} + 3^{2n+1} &= 4\cdot 2^n + 3\cdot 9^n \\ &= 7\cdot 2^n - 3\cdot 2^n + 3\cdot 9^n \\ &= 7\cdot 2^n + 3\cdot(9^n - 2^n) \\ &= 7\cdot 2^n + 3\cdot(9-2)\cdot\left(9^{n-1} + 9^{n-2}\cdot 2 + \cdots + 9\cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}\right) \\ &= 7\cdot\left[2^n + 3\cdot\left(9^{n-1} + 9^{n-2}\cdot 2 + \cdots + 9\cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}\right)\right] && \text{(4 boda)} \end{aligned}$$

Drugo rješenje. Zadatak rješavamo matematičkom indukcijom.

Označimo $a(n) = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$.

Broj $a(1) = 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$ je djeljiv sa 7.

Neka je, za neki prirodni broj k, broj $a(k) = 2^{k+2} + 3^{2k+1}$ djeljiv sa 7.

Vrijedi

$$a(k+1) = 2^{k+3} + 3^{2k+3} = 2\cdot 2^{k+2} + 9\cdot 3^{2k+1} = 2\cdot\left(2^{k+2} + 3^{2k+1}\right) + 7\cdot 3^{2k+1}.$$

Prema pretpostavci indukcije, izraz u zagradi je djeljiv sa 7. Stoga je i $a(k+1)$ djeljiv sa 7.

Sad po principu matematičke indukcije možemo zaključiti da je broj $a(n)$
djeljiv sa 7 za sve $n \in \mathbb{N}$. (4 boda)

Zadatak A-4.4. (4 boda)

Matija i Tomislav igraju sljedeću igru:

Svaki od njih baca par igraćih kocaka. Ako barem jedan od njih dobije zbroj brojeva na kockama djeljiv s 3, onda pobjeđuje Matija; inače, pobjeđuje Tomislav.

Kolika je vjerojatnost da će Matija pobijediti?

Prvi dio rješenja. **(2 boda)**

Prvi način.
Vjerojatnost da zbroj brojeva na dvije bačene kocke bude djeljiv s 3 iznosi $\frac{1}{3}$. (1 bod)

Naime, koji god broj n pao na prvoj kocki, postoje dva broja koja se mogu pojaviti na drugoj kocki koja zbrojena s n daju zbroj djeljiv s 3 te četiri broja koja zbrojena s n daju zbroj koji nije djeljiv s 3. (1 bod)

Drugi način.
Na slici su označeni svi mogući ishodi bacanja dvije kocke te su istaknuti zbrojevi djeljivi s 3.

	1	2	3	4	5	6
1	2	**3**	4	5	**6**	7
2	**3**	4	5	**6**	7	8
3	4	5	**6**	7	8	**9**
4	5	**6**	7	8	**9**	10
5	**6**	7	8	**9**	10	11
6	7	8	**9**	10	11	**12**

Vidimo da od 36 mogućih ishoda bacanja dvije kocke, njih 12 zadovoljava uvjet da je zbroj brojeva na kockama djeljiv s 3. Prema tome, zaključujemo da je vjerojatnost da zbroj brojeva na dvije bačene kocke bude djeljiv s 3 iznosi $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. (2 boda)

Drugi dio rješenja. **(2 boda)**

Prvi način. Tomislav pobjeđuje ako zbroj nije djeljiv s 3 ni u jednom paru kocaka. Prema tome, vjerojatnost da Tomislav pobijedi je $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$,

dok vjerojatnost da Matija pobijedi iznosi $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. (2 boda)

Drugi način. Matija pobjeđuje u slučaju da je točno jedan od njih (bilo Matija, bilo Tomislav) dobio zbroj djeljiv s 3 te u slučaju da su obojica dobila zbroj djeljiv s 3.

Dakle, vjerojatnost da Matija pobijedi jednaka je

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Napomena. Ako učenik bez valjanog objašnjenja koristi činjenicu da vjerojatnost da zbroj brojeva na dvije bačene kocke bude djeljiv s 3 iznosi $\frac{1}{3}$ dobiva 1 bod od predviđena dva boda za prvi dio rješenja.

Zadatak A-4.5. (4 boda)

Pravilni tetraedar $ABXY$ smješten je u kocku $ABCDA'B'C'D'$ stranice duljine 1 tako da točka X leži u ravnini $ABCD$. Odredi udaljenost točaka Y i A'.

Prvo rješenje.

Neka je Z nožište okomice iz točke Y na ravninu $A'B'C'D'$, a W nožište okomice iz točke Y na ravninu $ABCD$. Vrijedi da je $|ZA'| = |WA|$.

Točka W je težište jednakostraničnog trokuta ABX pa je $|WA| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Trokut AWY je pravokutan s pravim kutom u vrhu W pa po Pitagorinom poučku vrijedi:

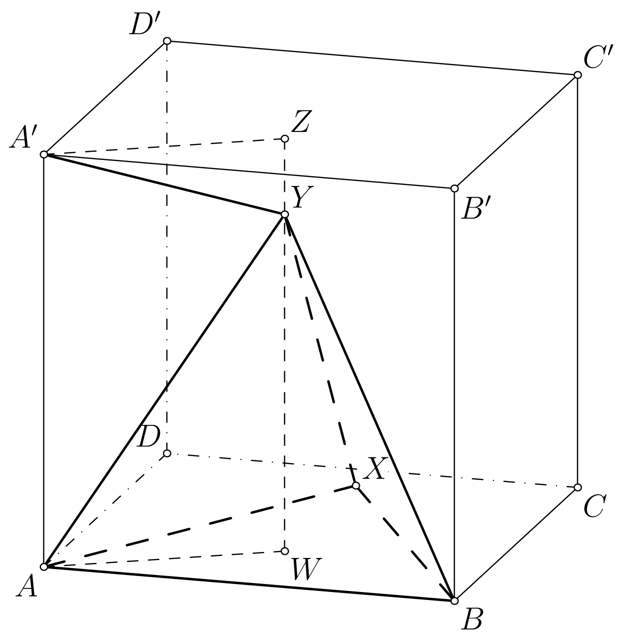
$$|WY| = \sqrt{|AY|^2 - |AW|^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Iz toga dobivamo:

$$|ZY| = |ZW| - |YW| = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3-\sqrt{6}}{3}.$$

Konačno, iz činjenice da je trokut $A'YZ$ pravokutan s pravim kutem u vrhu Z, imamo:

$$\begin{aligned} |A'Y| &= \sqrt{|A'Z|^2 + |YZ|^2} \\ &= \sqrt{|AW|^2 + |YZ|^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}}. \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$



Drugo rješenje.

Postavimo kocku u koordinatni sustav u prostoru tako da je

$$A(0,0,0), \quad B(1,0,0), \quad D(0,1,0), \quad A'(0,0,1).$$

Koordinate točke X su $X\left(\frac{1}{2}, x, 0\right)$ i vrijedi $|AX| = |AB| = 1$,

pa je $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $X\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Koordinate središta (težišta) trokuta ABX (točka W na slici) su

$$\left(\frac{0+1+\frac{1}{2}}{3}, \frac{0+0+\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}, \frac{0+0+0}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right).$$

Ta točka je ortogonalna projekcija vrha Y na ravninu $ABCD$, pa je $Y\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, y\right)$.

Vrijedi $|AY| = |AB| = 1$ pa iz:

$$|AY| = \left|\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, y\right)\right| = \frac{1}{4} + \frac{3}{36} + y^2 = 1$$

dobivamo $y = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (2 boda)

i konačno $Y\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Sada možemo odrediti traženu udaljenost $|A'Y|$.

$$\begin{aligned}|A'Y| &= \left|\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - 1\right)\right)\right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36} + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - 1\right)^2} \\ &= \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}}}.\end{aligned}$$

(2 boda)

Zadatak A-4.6. (10 bodova)

Neka su a i b prirodni brojevi. Koje sve znamenke mogu biti na mjestu jedinica u dekadskom zapisu broja $(a+b)^5 - (a^5 + b^5)$?

Rješenje.

Zadani izraz može se raspisati na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^5 - \left(a^5 + b^5\right) \\
&= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 - a^5 - b^5 && \text{(1 bod)} \\
&= 5\left(a^4b + 2a^3b^2 + 2a^2b^3 + ab^4\right) && (*) \\
&= 5ab\left(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3\right) \\
&= 5ab\,(a+b)\left(a^2 + ab + b^2\right).
\end{aligned}
$$

Iz $(*)$ vidimo da je dani izraz uvijek djeljiv s 5. (4 boda)

Dokažimo da je djeljiv i s 2.
To očito vrijedi ukoliko je barem jedan od brojeva a i b paran.

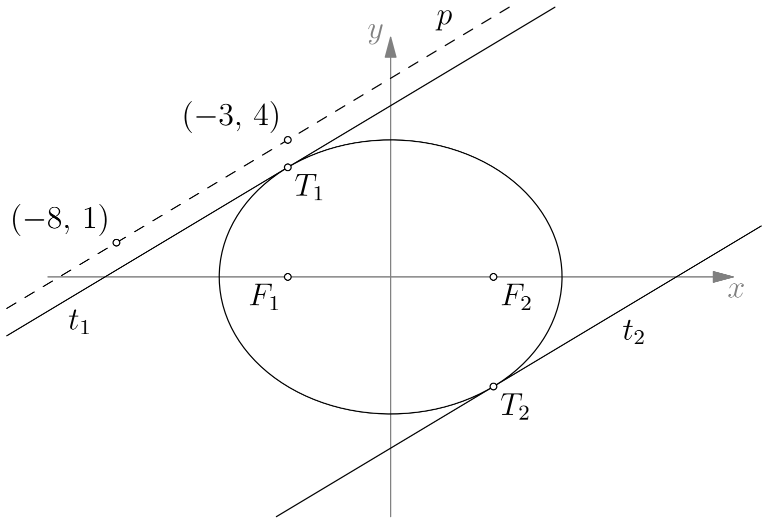
U suprotnom, a i b su neparni pa je $a + b$ paran broj.
Dakle i u tom slučaju je dani izraz djeljiv s 2. (4 boda)

Zaključujemo da zadani broj završava znamenkom 0 za sve prirodne brojeve a i b. (1 bod)

Zadatak A-4.7. (10 bodova)

Među svim točkama z kompleksne ravnine za koje je $|z+3|+|z-3|=10$ odredi onu koja je najbliža pravcu koji prolazi točkama $(-3+4i)$ i $(-8+i)$.

Prvo rješenje.



Zadani skup je skup svih točaka za koje je zbroj udaljenosti od točaka -3 i 3 iznosi 10 pa je to elipsa. Za nju vrijedi da je $2a=10$ (zbroj udaljenosti od žarišta), tj. $a=5$.

Žarišta su joj točke $(3,0)$ i $(-3,0)$ pa $e=3$.

Sada možemo izračunati

$$b=\sqrt{a^2-e^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4.$$

Dakle, jednadžba zadane elipse je

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1, \qquad \text{(2 boda)}$$

odnosno $16x^2+25y^2=400$.

Dani pravac prolazi točkama $(-3,4)$ i $(-8,1)$ pa je njegov koeficijent smjera:

$$k_p=\frac{1-4}{-8-(-3)}=\frac{3}{5}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Traženu točku ćemo odrediti kao dirалište jedne od tangenata zadane elipse paralelne danom pravcu. (1 bod)

Tangenta na elipsu u točki (x_0,y_0) ima jednadžbu $b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$ pa joj je koeficijent smjera

$$k_t=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=-\frac{16x_0}{25y_0}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz uvjeta paralelnosti pravca i tangente dobijemo:

$$-\frac{16x_0}{25y_0}=\frac{3}{5}, \qquad \text{(2 boda)}$$

odnosno $y_0=-\frac{16}{15}x_0$. Uvrštavanjem u jednadžbu tangente dobijemo:

$$16x_0^2+25\left(\frac{16}{15}x_0\right)^2=400,$$

odakle je $x_0 = \pm 3$.

Dakle, točke dodira tangente i elipse su: $T_1\left(-3, \frac{16}{5}\right)$ i $T_2\left(3, -\frac{16}{5}\right)$. (2 boda)

Sa slike vidimo da je traženo rješenje $T_1\left(-3, \frac{16}{5}\right)$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju odredimo jednadžbu elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$, (2 boda)

i koeficijent smjera danog pravca $k = \frac{3}{5}$. (1 bod)

Traženu točku ćemo odrediti kao diralište jedne od tangenata zadane elipse paralelne danom pravcu. (1 bod)

Da bismo odredili jednadžbe tangenti s koeficijentom smjera $k = \frac{3}{5}$ koristimo uvjet dodira $a^2k^2 + b^2 = l^2$. (2 boda)

$$l^2 = 25 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 16 = 9 + 16 = 25$$

Stoga su pravci $y = \frac{3}{5}x + 5$ i $y = \frac{3}{5}x - 5$ tangente. (1 bod)

Sa slike vidimo da nam treba "gornja" tangenta, $y = \frac{3}{5}x + 5$. (1 bod)

Odredimo njeno diralište s elipsom. Rješavanjem sustava:

$$\begin{cases} 16x^2 + 25y^2 = 400 \\ y = \frac{3}{5}x + 5 \end{cases}$$ (1 bod)

Dobivamo jednadžbu: $16x^2 + (3x + 25)^2 = 400$

koja se svodi na $x^2 + 6x + 9 = 0$,

pa je rješenje sustava $x = -3$, $y = \frac{16}{5}$.

Tražena točka je $\left(-3, \frac{16}{5}\right)$. (1 bod)

Napomena. Do jednadžbe elipse možemo doći i ovako:

$$\begin{gathered}
|(x + iy) + 3| + |(x + iy) - 3| = 10 \\
\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10 \\
\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \\
(x+3)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + (x-3)^2 + y^2 \\
10\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 50 - 6x \\
100(x^2 - 6x + 9) = 2500 - 600x + 36x^2 \\
16x^2 + 25y^2 = 400
\end{gathered}$$

Zadatak A-4.8. (10 bodova)

Neka je n prirodan broj. Dokaži da je broj neparnih brojeva među brojevima

$$\binom{2n+1}{1}, \binom{2n+1}{2}, \ldots, \binom{2n+1}{k}, \ldots, \binom{2n+1}{n}$$

neparan.

Rješenje.

Promotrimo zbroj svih danih brojeva:

$$S = \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \cdots + \binom{2n+1}{n}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako je $\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k}$, za $k \in \{1, 2, \ldots n\}$, vrijedi

$$\begin{aligned} S &= \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \cdots + \binom{2n+1}{n} \\ &= \binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n-1} + \cdots + \binom{2n+1}{n+1} \qquad \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

Prema binomnom poučku,

$$\begin{aligned} (1+1)^{2n+1} &= \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \cdots + \binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n+1} \qquad \text{(1 bod)} \\ &= 1 + \binom{2n+1}{1} + \cdots + \binom{2n+1}{n} + \binom{2n+1}{n+1} + \cdots + \binom{2n+1}{2n} + 1 \\ &= 1 + S + S + 1 \qquad \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

pa je $2S + 2 = 2^{2n+1}$, odnosno $S = 2^{2n} - 1$. (1 bod)

Dakle, zbroj svih danih brojeva je neparan broj. Iz toga zaključujemo da među danim brojevima ima neparno mnogo neparnih brojeva. (3 boda)

Napomena. Ako učenik uoči da je dovoljno dokazati da je zbroj danih brojeva neparan, ali ne dođe do kraja, treba mu za tu primjedbu dodatno dati 1 bod.